Isométries - Déplacements - Antidéplacements

Généralités

- Si f et g sont deux isométries du plan n'ayant pas les mêmes points fixes alors f et g sont distinctes.
- Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques alors il existe une isométrie et une seule telle que : f(A) = A' , f(B) = B' et f(C) = C' .
- Si A , B , A' et B' sont quatre points du plan tels que : AB = A'B' et $A \neq B$ alors il existe exactement deux isométries du plan f et g telles que : f (A) = g(A) = A' et f(B) = g(B) = B' . En outre : $g = S_{(AA')} \circ f = f \circ S_{(BB')}$.

Isométries du plan

On appelle isométrie toute bijection du plan concervant les distances

La composée de deux isométries est une isométrie

La réciproque d'une isométrie est une isométrie

Isométries et points fixes

- Toute isométrie du plan ayant au moins 3 points invariants non alignés est l'identité dans le plan
- Toute isométrie du plan qui laisse invariant 2 points distincts *A* et *B* est :
  - Soit une identité dans le plan
  - Soit une symétrie orthogonale d'axe la droite (AB).
- Toute isométrie qui laisse un point invariant *A* est :
  - Soit l'identité dans le plan
  - Soit une symétrie orthogonale d'axe passant par A.
  - Soit une rotation de centre *A*

Propriétés des isométries

- Conservation du barycentre
- Conservation des milieux
- Conservation de l'alignement (l'image d'une droite est une droite)
- Conservation du parallélisme
- Conservation de l'orthogonalité
- L'image d'une cercle est un cercle de même rayon
- Conservation de contact

  Les images part une isométrie f de deux droites sécantes en un point Isont deux droites sécantes en f (A).
- Conservation des aires
- Conservation des angles non orientés

Isométries - Déplacements - Antidéplacements

Déplacements

1. Définition :

f est un déplacement du plan si et seulement si f est la composée d'un nombre pair de symétries axiales .

Conséquences :

- f est un déplacement du plan si et seulement si f est une ismétrie qui conserve les mesures des angles orientés.
- Tout déplacement est une rotation ou une translation.

2. Caractérisation :

Un déplacement f est entièrement déterminé par la donnée de deux points distincts A et B et de leurs images A' et B'. L'angle θ de f est une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

Conséquences :

- un déplacement d'angle nul est une translation.
- un déplacement d'angle plat est une symétrie centrale.
- un déplacement d'angle θ non nul est une ratation d'angle θ .

Si les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles alors le centre de f est le point d'intersection des médiatrices des segments [AA'] et [BB'] .
Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles alors le centre de f est le point d'intersection (AB) et (A'B') .

3. Composition :

La composée de deux déplacements d'angles θ et θ' est un déplacement d'angle $\theta+\theta'$.

En particuliers :

- la composée d'une rotation d'angle θ et d'une translation est une rotation de même angle θ .
- Soit r la rotation de centre I et d'angle θ et r' la rotation de centre I' et d'angle θ'
Si $\theta+\theta' \neq 2k\pi , k \in Z$ alors $r \circ r'$ et $r' \circ r$ sont deux rotations d'angles $\theta+\theta'$.
Si $\theta+\theta' = 2k\pi , k \in Z$ alors $r \circ r'$ et $r' \circ r$ sont deux translations .
Remarquons que dans tous les cas : $r \circ r' \neq r' \circ r$.

Isométries - Déplacements - Antidéplacements

Antidéplacements

1. Définition :

g est un antidéplacement du plan si et seulement si g est la composée d'un nombre impair de symétries axiales .

Conséquences :

- g est un antidéplacement du plan si et seulement si g est une isométrie qui renverse les mesures des angles orientés.
- Tout antidéplacement est une symétrie axiale ou une symétrie glissante.

2. Caractérisation :

Un antidéplacement g est entièrement déterminé par la donnée de deux points distincts A et B et de leurs images A' et B'.

Conséquences :

- Si g admet un point fixe I, alors g est une symétrie axiale d'axe passant par I .
- Si les segments [AA'] et [BB'] admettent la même médiatrice (Δ) alors $g = S_\Delta$.
- Si g n'admet aucun point invariant alors g est une symétrie glissante.
- Si les segments [AA'] et [BB'] n'admettent pas la même médiatrice alors g est symétrie glissante.

Rappelons que : si g est une symétrie glissante d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de (Δ)) alors

la forme réduite de g est $g = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

pour tout point M du plan d'image M' par g , $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow M \in (\Delta)$.

Quelques remarques utiles :

1. Si I et J sont les milieux respectifs de [AA'] et [BB'] et $I \neq J$ alors l'axe de g est la droite (IJ).
2. Si les segments [AA'] et [BB'] ont même milieu I, on détermine $I' = g(I)$.

   L'axe de g est donc la droite (II') et le vecteur de g est $\overrightarrow{II'}$.
3. Si B = A' (g(A) = A' et g(A') = B') alors le vecteur $\vec{u}$ de g vérifie $g \circ g = t_{2\vec{u}}$.

3. Composition :

- la composé de deux antidéplacements est un déplacement.
- la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Isométries - Déplacements - Antidéplacements

f est un déplacement du plan

si et seulement si sa caractérisation complexe est $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $b \in C$

- Si $a = 1$, f est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $a \neq 1$, f est une rotation de centre $\Omega_{\left(\frac{b}{1-a}\right)}$ et son angle est $\theta \equiv \arg a\ [2\pi]$

f est un antidéplacement

si et seulement si sa caractérisation complexe est $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$ et $b \in C$

Classification des isométries suivant l'ensemble des points invariants :

Ensemble des points invariants	$\varnothing$	$\{\Omega\}$	(Δ)	(P)
Déplacement	$t_{\vec{u}}$, $\vec{u} \neq \vec{o}$	$R(\Omega,\theta)$, $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$		Id_P
Antidéplacement	$t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ $\vec{u}$ vect dir de Δ		S_Δ	